2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός : $\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \beta > 0$

2.

Ιδιότητες

$(\alpha > 0 \quad \text{και} \quad \beta > 0) \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta > 0$ (όχι αντίστροφα)

$(\alpha < 0 \quad \text{και} \quad \beta < 0) \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta < 0$ (όχι αντίστροφα)

α, β ομόσημοι $\quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot \beta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$

α, β ετερόσημοι $\quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot \beta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$

$\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$

$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \quad \text{και} \quad \beta = 0$

$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 0 \quad \text{ή} \quad \beta \neq 0$

$(\alpha > \beta \quad \text{και} \quad \beta > \gamma) \quad \Rightarrow \quad \alpha > \gamma$ (όχι αντίστροφα)

$\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

Για $\gamma > 0$: $\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

Για $\gamma < 0$: $\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

$\alpha > \beta \quad \text{και} \quad \gamma > \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma > \beta + \delta$

Για $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικούς : $(\alpha > \beta \quad \text{και} \quad \gamma > \delta) \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Για α, β θετικούς και $\nu \in \mathbb{N}^*$: $\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^\nu > \beta^\nu$

Για α, β θετικούς και $\nu \in \mathbb{N}^*$: $\alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^\nu = \beta^\nu$

netsuccess.gr

ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ

1.
Ο πολλαπλασιασμός με αρνητικό αριθμό

Όταν πολλαπλασιάζουμε (διαιρούμε) τα δύο μέλη ανίσωσης με αρνητικό αριθμό, πρέπει να αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης.
Το ίδιο όταν αλλάζουμε πρόσημα στα δύο μέλη.

2.
Η πρόσθεση ανισοτήτων

Μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη <u>ομοιόστροφες</u> ανισότητες
Όχι όμως να αφαιρούμε.

3.
Ο πολλαπλασιασμός ανισοτήτων

Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη <u>ομοιόστροφες</u> ανισότητες , εφ'όσον όλα τα μέλη είναι θετικά.
Όχι όμως να διαιρούμε.

4.
Η απαλοιφή παρανομαστών

Σε μία ανίσωση, όταν κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών, δεν κάνουμε τίποτε άλλο παρά να πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π των παρανομαστών.

Πρέπει, λοιπόν, να προσέχουμε αν το Ε.Κ.Π είναι θετικό ή αρνητικό, οπότε θα παραμείνει ή θα αλλάξει η φορά της ανίσωσης.

5.
Μια παράξενη ισοδυναμία

Παράγραφος 1.1
Σχόλιο 5

$\alpha^2+\beta^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=0 \text{ και } \beta=0$

Απόδειξη

Ευθύ Με υπόθεση $\alpha^2+\beta^2=0$ θα αποδείξουμε ότι $\alpha=0$ και $\beta=0$.
Αν ένας τουλάχιστον από τους α, β ήταν $\neq 0$, έστω $\alpha \neq 0$,
τότε $\alpha^2>0$
άρα $\alpha^2+\beta^2>0$
που είναι άτοπο, αφού $\alpha^2+\beta^2=0$

Απαγωγή σε άτοπο

Αντίστροφο Με υπόθεση $\alpha=0$ και $\beta=0$ θα αποδείξουμε ότι $\alpha^2+\beta^2=0$
$\alpha^2+\beta^2=0^2+0^2$

netsuccess.gr

6.

Μια παράξενη ισοδυναμία

$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 0 \quad ή \quad \beta \neq 0$

Απόδειξη

Ευθύ Με υπόθεση $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ θα αποδείξουμε ότι $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

Αν ήταν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$

τότε $\alpha^2 + \beta^2 = 0^2 + 0^2 = 0$ που είναι άτοπο, αφού $\alpha^2 + \beta^2 > 0$

Αντίστροφο Με υπόθεση $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ θα αποδείξουμε ότι $\alpha^2 + \beta^2 > 0$

Έστω $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha^2 > 0$, άρα $\alpha^2 + \beta^2 > 0$

7.

Προσοχή στο λάθος : $x < 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 25$

Ας θέσουμε όπου x το -6

– $-6 < 5 \quad \Rightarrow \quad (-6)^2 < 25$ δηλαδή $36 < 25$!

Ισχύει μόνο για $x \geq 0$

8.

Προσοχή στο λάθος : $x^2 < 25 \quad \Rightarrow \quad x < 5$

Ισχύει μόνο για $x \geq 0$

9.

Η αντιστροφή των μελών

Όταν αντιστρέφουμε τα δύο <u>θετικά</u> μέλη ανίσωσης , αντιστρέφουμε και τη φορά της ανίσωσης. : Αν α, β θετικοί και $\alpha < \beta$ τότε $\dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\beta}$

10.

Οι τιμές μεταβλητής x σε διάστημα

$\alpha \leq x \leq \beta \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\alpha, \ \beta]$

$\alpha \leq x < \beta \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\alpha, \ \beta)$

$\alpha < x \leq \beta \quad \Leftrightarrow \quad x \in (\alpha, \ \beta]$

$\alpha < x < \beta \quad \Leftrightarrow \quad x \in (\alpha, \ \beta)$

$x \geq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\alpha, \ +\infty)$

$x > \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x \in (\alpha, \ +\infty)$

$x \leq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, \ \alpha]$

$x < \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, \ \alpha)$

netsuccess.gr

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, να δείξετε ότι $\alpha - \delta < \beta - \gamma$.

Λύση

$\gamma < \delta \Rightarrow -\delta < -\gamma$ **(1)**

Σχόλιο 2

αλλά $\alpha < \beta$ **(2)**

$(1) + (2) \Rightarrow \alpha - \delta < \beta - \gamma$.

2.

Αν $0 < \alpha < \beta$ και $0 < \gamma < \delta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\delta} < \frac{\beta}{\gamma}$

Λύση

1ος τρόπος

$0 < \gamma < \delta \Rightarrow 0 < \frac{1}{\delta} < \frac{1}{\gamma}$ **(1)**

Σχόλια 3 και 9

αλλά $0 < \alpha < \beta$ **(2)**

$(1) . (2) \Rightarrow \frac{1}{\delta} \cdot \alpha < \frac{1}{\gamma} \cdot \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\delta} < \frac{\beta}{\gamma}$

2ος τρόπος

Σχόλια 3 και 4

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{\alpha}{\delta} < \frac{\beta}{\gamma}$ Ε.Κ.Π $= \gamma\delta > 0$ οπότε

αρκεί να αποδείξουμε $\alpha\gamma < \beta\delta$

που ισχύει, αν πολλαπλασιάσουμε τις δύο υποθέσεις

3.

i) Αν $0 < \alpha < 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha^\nu} > 1$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$

ii) Αν $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha^\nu} < 1$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$

Λύση

i)

$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu > 1^\nu \Rightarrow \frac{1}{\alpha^\nu} > 1$

ii)

$1 < \alpha \Rightarrow 1 > \frac{1}{\alpha} > 0 \Rightarrow 1^\nu > \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu \Rightarrow 1 > \frac{1}{\alpha^\nu} \Rightarrow \frac{1}{\alpha^\nu} < 1$

netsuccess.gr

4.

Αν $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha^3 > 3\alpha^2 - 3\alpha + 1$

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 > 0$

$(\alpha - 1)^3 > 0$

$\alpha - 1 > 0$

$\alpha > 1$ που ισχύει

5.

i) Αν $0 < \alpha < 1$ και $\kappa,\ \lambda \in \mathbb{N}^*$ με $\kappa > \lambda$, να αποδείξετε ότι $\alpha^\kappa < \alpha^\lambda$

ii) Αν $\alpha > 1$ και $\kappa,\ \lambda \in \mathbb{N}^*$ με $\kappa > \lambda$, να αποδείξετε ότι $\alpha^\kappa > \alpha^\lambda$

Λύση

i)

Θα είναι $\kappa = \lambda + \mu$, όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$

Οπότε $\alpha^\kappa = \alpha^{\lambda+\mu} = \alpha^\lambda\,\alpha^\mu$ **(1)**

Επειδή όμως $0 < \alpha < 1$ θα έχουμε $\alpha^\mu < 1^\mu = 1$ **(2)**

Η (1) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\alpha^\kappa = \alpha^\lambda\,\alpha^\mu < \alpha^\lambda \cdot 1 = \alpha^\lambda$

ii)

Θα είναι $\kappa = \lambda + \mu$, όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$

Οπότε $\alpha^\kappa = \alpha^{\lambda+\mu} = \alpha^\lambda\,\alpha^\mu$ **(3)**

Επειδή όμως $\alpha > 1$ θα έχουμε $\alpha^\mu > 1^\mu = 1$ **(4)**

Η (3) $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $\alpha^\kappa = \alpha^\lambda\,\alpha^\mu > \alpha^\lambda \cdot 1 = \alpha^\lambda$

6.

Αν $-2 \le x \le 1$ και $0 \le y \le 2$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $\Pi = 2x - 3y + 1$.

Λύση

$-2 \le x \le 1 \quad \Rightarrow \quad -4 \le 2x \le 2$ **(1)**

$0 \le y \le 2 \quad \Rightarrow \quad -3\cdot 0 \ge -3y \ge -6 \quad \Rightarrow \quad -6 \le -3y \le 0$ **(2)**

(1) + (2) $\quad \Rightarrow \quad -10 \le 2x - 3y \le 2$

Σχόλιο 2

$-10 + 1 \le 2x - 3y + 1 \le 2 + 1$

$-9 \le 2x - 3y + 1 \le 3$

Άρα η μέγιστη τιμή της παράστασης Π είναι 3 και η ελάχιστη είναι –9

netsuccess.gr

7.
Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, να αποδείξετε ότι

$$(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta.$$

Λύση

$(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 4\alpha\beta$

$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

$(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ που ισχύει

8.

Αν $\alpha+\beta>0$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

Λύση

$\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \dfrac{\alpha+\beta}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2$

$2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

$(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ που ισχύει

9.
Να αποδείξετε ότι το ημιάθροισμα δύο αριθμών είναι μεταξύ αυτών.
Λύση
Έστω α, β με $\alpha<\beta$ οι δύο αριθμοί.

θα αποδείξουμε $\alpha < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \beta$

- Για την $\alpha < \dfrac{\alpha+\beta}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha < \alpha+\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha<\beta$ που ισχύει
- Για την $\dfrac{\alpha+\beta}{2} < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha+\beta < 2\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha<\beta$ που ισχύει

netsuccess.gr

10.

Αν $\alpha_1 < \alpha_2 < \; . \; . \; . \; < \alpha_\nu$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha_1 < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \; . \; . \; . \; \alpha_\nu}{\nu} < \alpha_\nu \, .$$

Λύση

Αρκεί να δειχθεί ότι $\nu\alpha_1 < \alpha_1 + \alpha_2 + \; . \; . \; . \; + \alpha_\nu < \nu\alpha_\nu$

Είναι $\nu\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_1 + \; . \; . \; . + \alpha_1 < \alpha_1 + \alpha_2 + \; . \; . \; . \; + \alpha_\nu$

και $\nu\alpha_\nu = \alpha_\nu + \alpha_\nu + \; . \; . \; . \; + \alpha_\nu > \alpha_1 + \alpha_2 + \; . \; . \; . \; + \alpha_\nu$

11.

Αν $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι **i)** $\alpha\beta \le \frac{1}{4}$ και **ii)** $\alpha^2 + \beta^2 \ge \frac{1}{2}$

Λύση

i)

$\alpha + \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1 - \alpha$

$$\alpha\beta \le \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4\alpha\beta \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4\alpha\,(1 - \alpha) \le 1$$

$$4\alpha - 4\alpha^2 \le 1$$

$$0 \le 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$0 \le (2\alpha - 1)^2 \quad \text{που ισχύει}$$

ii)

$$\alpha^2 + \beta^2 \ge \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 \ge \frac{1}{2}$$

$$\alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2 \ge \frac{1}{2}$$

$$2\alpha^2 + 1 - 2\alpha \ge \frac{1}{2}$$

$$4\alpha^2 + 2 - 4\alpha \ge 1$$

$$4\alpha^2 - 4\alpha + 1 \ge \quad \Leftrightarrow \quad (2\alpha - 1)^2 \ge 0 \quad \text{που ισχύει}$$

netsuccess.gr

12.

Δίνεται η παράσταση $\Pi = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 1$

i) Να μετασχηματίσετε την παράσταση σε άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων

ii) Αν $\Pi = 0$, να βρείτε τους x, y.

Λύση

i)

$$\Pi = x^2 + x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 1$$

$$= (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + 2x + 1)$$

$$= (x - y)^2 + (x + 1)^2$$

ii)

$$\Pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)^2 + (x + 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0 \quad \text{και} \quad x + 1 = 0$$

$$x = y \quad \text{και} \quad x = -1$$

$$y = -1 \quad \text{και} \quad x = -1$$

netsuccess.gr